

# ESTUDIO DE ESTRUCTURAS SOMETIDAS A ESFUERZOS DE IMPACTO EN REGIMEN ELASTOPLASTICO Y CON GRANDES DEFORMACIONES POR EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS. PARTE I: FORMULACION TEORICA

J. MIQUEL CANET

y

J. BONET CARBONELL

*Escuela de Ingenieros de Caminos,  
Canales y Puertos de Barcelona*

## RESUMEN

Se desarrolla en este primer artículo, la formulación teórica para el estudio tridimensional de cuerpos sometidos a acciones de contacto-impacto. Después de desarrollar las ecuaciones básicas de equilibrio, se estudian las ecuaciones constitutivas utilizadas. El elemento usado es el hexaédrico de ocho nodos, del cual se establecen algunas propiedades, que serán de utilidad para la integración numérica. En un artículo posterior, se desarrollará el algoritmo de contacto-impacto estudiado, así como varios ejemplos.

## SUMMARY

In this first part of the paper, we develop the theoretical formulation for the tridimensional study of bodies under contact-impact actions. After developping the basic equilibrium equations, the constitutive equations used are studied. The element used is the hexaedric with eight nodes, from which are established some properties that will be necessary for the numerical integration. In the second part of the paper, we shall develop the contact-impact algorithm studied before, as well as several examples.

## INTRODUCCION

Previamente al desarrollo de la tecnología informática, la única herramienta disponible para la resolución de problemas de contacto-impacto era la teoría de Hertz. Dicha teoría, ya clásica dentro del campo de la elasticidad, exigía un importante número de restricciones, de entre las cuales cabe destacar la hipótesis de elasticidad lineal, así como la aproximación de las zonas de contacto por superficies de segundo orden.

Aún con tales hipótesis la solución de problemas de contacto e impacto era en muchas ocasiones imposible de alcanzar en forma analítica, y en los casos, extremadamente simples, que tal solución podía obtenerse, la hipótesis de material elástico conducía invariablemente a resultados con elevadas tensiones. Tales dificultades fueron en parte resueltas con la aparición de los ordenadores y los modernos métodos numéricos de cálculo.

El origen de los métodos numéricos aplicados a problemas de contacto-impacto se encuentra en las primeras soluciones obtenidas por diferencias finitas sobre problemas

Recibido: Febrero 1987

de propagación no lineal de ondas, aplicados especialmente en el ámbito de la tecnología militar. Tales estudios fueron conducidos principalmente por Wilkins<sup>1</sup>, Maenchen y Sack<sup>2</sup> y Noh<sup>3</sup>.

Las primeras aplicaciones del M.E.F. a problemas de propagación no lineal de ondas se atribuyen a Constantino<sup>4</sup>, Oden<sup>5</sup>, y posteriormente a los estudios de Key<sup>6</sup>, Wilson<sup>7</sup> y Belytschko<sup>8,9</sup>.

Cronológicamente el primer método que se desarrolló para la representación de las zonas de contacto-impacto es el debido a Hughes et al.<sup>10</sup>, llamado método de las restricciones nodales ("nodal constraint method"), en el cual se establecen las condiciones discretas que deben cumplirse en las zonas de contacto, zonas que quedaban representadas por un apareamiento de nodos pertenecientes a ambos sólidos. Posteriormente Hughes, Taylor, Sackman y Curnier<sup>11,12</sup>, perfeccionaron dicho método generalizándolo a problemas tridimensionales, e introduciendo las fuerzas de fricción y el contacto nodo-elemento.

Posteriormente se han desarrollado algoritmos numéricos más precisos y rápidos, como el método de las penalizaciones ("Penalty method") debido a Halquist<sup>13-16</sup>, método que se ha empleado en el presente estudio.

## ECUACIONES BASICAS DE EQUILIBRIO

# SCIPEDIA

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark



Figura 1. Deformación de un cuerpo

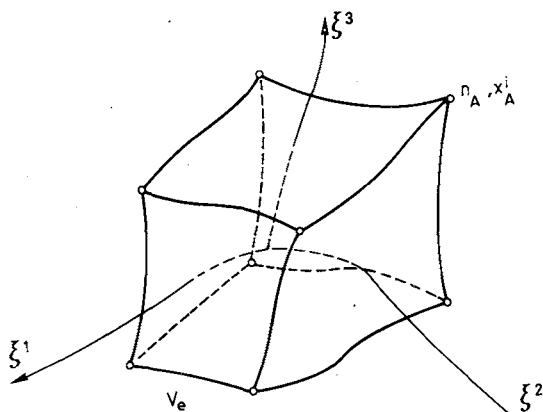


Figura 2. Elemento finito tridimensional

Considérese el sólido tridimensional de la figura 1, dividido en elementos finitos (fig. 2), que en el instante inicial  $t_0$  ocupa el volumen  $V_0$ , y que en un instante cualquiera de la deformación  $t$  ocupa el volumen  $V$ . Definamos en dicho sólido el siguiente conjunto de coordenadas:

- Un sistema de coordenadas intrínsecas  $\{\xi^\alpha\}$  definido en el dominio de cada elemento.
- Un sistema de coordenadas globales  $\{X^I\}$  las cuales hacen referencia a la posición de un punto cualquiera en el instante  $t$ .

$$X^I = X_A^I N_A(\xi^\alpha)$$

- Un sistema de coordenadas globales  $\{x^i\}$  que indican la posición de cualquier punto en el instante  $t$ .

$$x^i = x_A^i N_A(\xi^\alpha)$$

siendo  $N_A(\xi^\alpha)$  las funciones de forma del elemento.

Llamando  $\bar{v}^*$  a una velocidad virtual, la ecuación de equilibrio para cada elemento, en el sólido inicial y en el deformado, se escribe respectivamente

$$\int_{v_e} \varphi \bar{v}^* \cdot \bar{a} dV + \int_{v_e} \underline{g} : \underline{L}^* dV = \int_{v_e} \varphi \bar{v}^* \cdot \bar{b} dV + \int_{\partial v_e} \bar{v}^* \cdot \underline{g} \cdot \bar{n} da$$

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

$$\int_{v_0^e} \varphi^0 \bar{v}^* \cdot \bar{a} dV_0 + \int_{v_0^e} \underline{T} : (\bar{v}^* \bar{\nabla}_0) dv_0 = \int_{v_0^e} \varphi^0 \bar{v}^* \cdot \bar{b} dV_0 + \int_{\partial v_0^e} \bar{v}^* \cdot \underline{T} \cdot \bar{N} dA_0$$

Siendo

$\underline{T}$  el primer tensor de Piola-Kirchoff

$\underline{g}$  el tensor de tensiones de Cauchy

$\underline{L}$  el tensor gradiente de velocidades

y haciendo  $\bar{v}^* = v_A^* N_A$

se obtiene la ecuación dinámica de equilibrio

$$\bar{J}_A + \bar{T}_A = \bar{P}_A + \bar{B}_A \quad (1)$$

siendo para cada componente

$$J_A^i = \left( \int_{v_e} \varphi N_A N_B dV \right) a_B^i = \left( \int_{v_0^e} \varphi^0 N_A N_B dV_0 \right) a_B^i \quad (2)$$

$$T_A^i = \int_{v_e} \sigma^{ij} \frac{\partial N_A}{\partial x^j} dV = \int_{v_0^e} T^{iI} \frac{\partial N_A}{\partial X^I} dV_0 = \int_{v_0^e} T^{i\alpha} \frac{\partial N_A}{\partial \xi^\alpha} dV_0 \quad (3)$$

$$P_A^i = \int_{\partial v_e} N_A t^i da = \int_{\partial v_e^o} N_A T^i dA \quad (4)$$

$$B_A^i = \int_{v_e} \varphi N_A b^i dV = \int_{v_e^o} \varphi^o N_A b^i dV_o \quad (5)$$

Como puede observarse, las expresiones anteriores están escritas en coordenadas cartesianas o intrínsecas. Debido a condicionantes de rapidez de cálculo, es preferible utilizar un sistema cartesiano para representar el estado actual y trabajar con ambos —dependiendo de la ecuación constitutiva utilizada— en el estado inicial.

Procediendo al ensamblaje de elementos, la ecuación de equilibrio (1) se escribirá:

$$M_{ab} \ddot{x}_b^i + T_a^i = F_a^i \quad (6)$$

## ECUACIONES CONSTITUTIVAS UTILIZADAS

Los problemas de impacto, son básicamente problemas dinámicos con grandes deformaciones. A fin de conseguir una correcta modelización, se han usado tres tipos de ecuaciones constitutivas:

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

a) Ecuación constitutiva hiperelástica:

$$S^{IJ} = C^{IJKL} E_{KL} \quad (7)$$

o en coordenadas intrínsecas

$$S^{\Gamma\Lambda} = C^{\Gamma\Lambda\Omega\pi} E_{\Omega\pi}$$

en donde  $S^{IJ}$  es el segundo tensor de Piola-Kirchoff,  $C^{IJKL}$  es el tensor de elasticidad dado por

$$C^{IJKL} = \lambda \delta^{IJ} \delta^{KL} + \mu (\delta^{IK} \delta^{JL} + \delta^{IL} \delta^{JK}) \quad (8)$$

y  $E_{KL}$  es el tensor de Green

$$E_{KL} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial x^i}{\partial X^K} \frac{\partial x^i}{\partial X^L} - \delta^{KL} \right]$$

b) Ecuación constitutiva hipoelástica:.

$$\hat{\sigma}^{ij} = C^{ijkl} D_{kl} \quad (9)$$

siendo  $\hat{\sigma}^{ij}$  el tensor de tensiones de Jaumann

$$\hat{\sigma}^{ij} = \dot{\sigma}^{ij} + W_{ik} \sigma^{kj} + W_{jk} \sigma^{ki} \quad (10)$$

siendo  $W_{ik}$  el tensor velocidad de rotación

$$W_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right) \quad (11)$$

y  $D_{kl}$  es el tensor velocidad de deformación

$$D_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v^k}{\partial x^l} + \frac{\partial v^l}{\partial x^k} \right) \quad (12)$$

c) Ecuación constitutiva elastoplástica:

El tensor velocidad de deformación  $D_{ij}$  se descompone en una parte elástica y una

$$D_{ij} = D_{ij}^e + D_{ij}^p \quad (13)$$

en donde

$$D_{ij}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (14)$$

siendo  $F$  el potencial plástico que se supondrá, igual a la superficie de fluencia (plasticidad asociada)

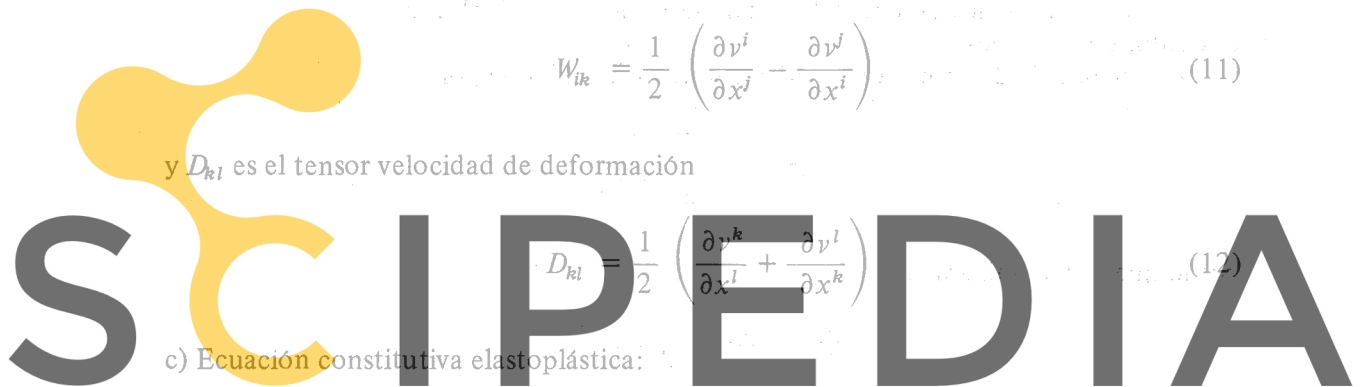
$$F(\sigma_{ij}, k) = 0 \quad (15)$$

en donde  $k$  es un parámetro de fluencia, función del trabajo plástico de deformación  $w_p$ .

$$\dot{w}_p = \sigma_{ij} D_{ij}^p \quad (16)$$

Por la ley de normalidad

$$D_{ij}^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (17)$$



Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

siendo

$$\lambda = - \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \hat{\sigma}_{ij}}{\frac{\partial F}{\partial k_j} \frac{\partial k_j}{\partial w_p} \sigma_{ij} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}} \quad (18)$$

Se utiliza como criterio de plastificación el de Von Misses, definido por

$$F = \frac{1}{2} z_{ij} z_{ij} - \frac{k^2}{3} = J^2 - \frac{k^2}{3} \quad (19)$$

siendo  $z_{ij}$  la parte desviadora del tensor de Cauchy, y  $J^2$  el segundo invariante del desviador de tensiones.

La velocidad de deformación plástica equivalente se define por

$$\dot{E} = \sqrt{\frac{2}{3} D_{ij}^P D_{ij}^P} \quad (20)$$

por lo que si denominamos

$$D_{ij}^1 = D_{ij} - \frac{1}{3} D_{kk} \delta_{kk} \quad (21)$$

y  $\hat{z}_{ij}$  a la derivada corrotacional de las tensiones desviadoras

$$\hat{z}_{ij} = 2G(D_{ij}^1 - D_{ij}^P) \quad (22)$$

se obtienen después de realizar algunas operaciones, las expresiones

$$\dot{E}_p = \sqrt{3} J^* (H + 3G) \quad (23)$$

$$\hat{z}_{ij} = 2G(D_{ij}^1 - \frac{1}{H+3G} \frac{3J^*}{2J} z_{ij}) = \hat{z}_{ij}^* - \frac{3G}{H+3G} \frac{J^*}{J} z_{ij} \quad (24)$$

en donde

$$H = \frac{\dot{k}}{\dot{E}_p} \quad (25)$$

$G$  = Módulo de Elasticidad transversal

$$J^* = \frac{H+3G}{H} J \quad (26)$$

$$\hat{z}_{ij}^* = 2G D_{ij}^1 \quad (27)$$

Con el exclusivo fin de dar mayor efectividad al programa y reducir el tiempo de cálculo (realmente este aspecto condiciona la mayor parte de los algoritmos usados), para una misma estructura y un mismo material se han introducido las tres ecuaciones constitutivas anteriores, combinándolas de acuerdo con los siguientes métodos:

a) Método hiperelástico:

Este método, usa exclusivamente la ecuación constitutiva hiperelástica. Se usa fundamentalmente en aquellas zonas de la estructura, que por su lejanía de la zona de impacto no es previsible su plastificación. La utilidad de este método, radica en el hecho de que es el que menos operaciones por elemento exige. Las fuerzas internas resistentes (ecuación (3)) se obtienen integrando en el volumen inicial y usando coordenadas intrínsecas.

b) Método elastoplástico:

Es el más exhaustivo, y el que mayor tiempo de cálculo requiere. Se usa en aquellas zonas próximas a la zona de impacto desde el primer momento. En régimen elástico, usa la ecuación constitutiva hipoeelástica y en régimen plástico la ecuación elastoplástica. Las fuerzas internas resistentes, se calculan integrando sobre el volumen deformado.

c) Método inicialmente elástico:

Se utiliza fundamentalmente en las zonas comprendidas entre las dos anteriores. Inicialmente, en las primeras iteraciones, dicha zona se modela con un material elastoplástico, hasta alcanzar una tensión equivalente del orden de 0,9 de la de fluencia, y a partir de entonces se sustituye por el método elastoplástico.

La utilización de estos tres métodos, se ha mostrado muy eficiente, permitiendo un ahorro considerable de tiempo.

### ELEMENTO HEXAEDRICO: INTEGRACION NUMERICA Y ALGUNAS RELACIONES UTILES

Nos proponemos en este apartado estudiar con algún detalle el elemento hexaédrico de ocho nodos integrado con un solo punto de Gauss, que es con el que se ha trabajado.

a) Funciones de forma e integración numérica:

Las funciones de forma de la clase  $C^0$  para dicho elemento (figura 3), pueden escribirse

$$\begin{aligned} \bar{N} &= [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8]^T = \\ &= \frac{1}{8} (\bar{B}_1 \xi^1 + \bar{B}_2 \xi^2 + \bar{B}_3 \xi^3 + \bar{B}_4 + \bar{B}_5 \xi^1 \xi^2 + \bar{B}_6 \xi^1 \xi^3 + \bar{B}_7 \xi^2 \xi^3 + \bar{B}_8 \xi^1 \xi^2 \xi^3) \end{aligned} \quad (28)$$

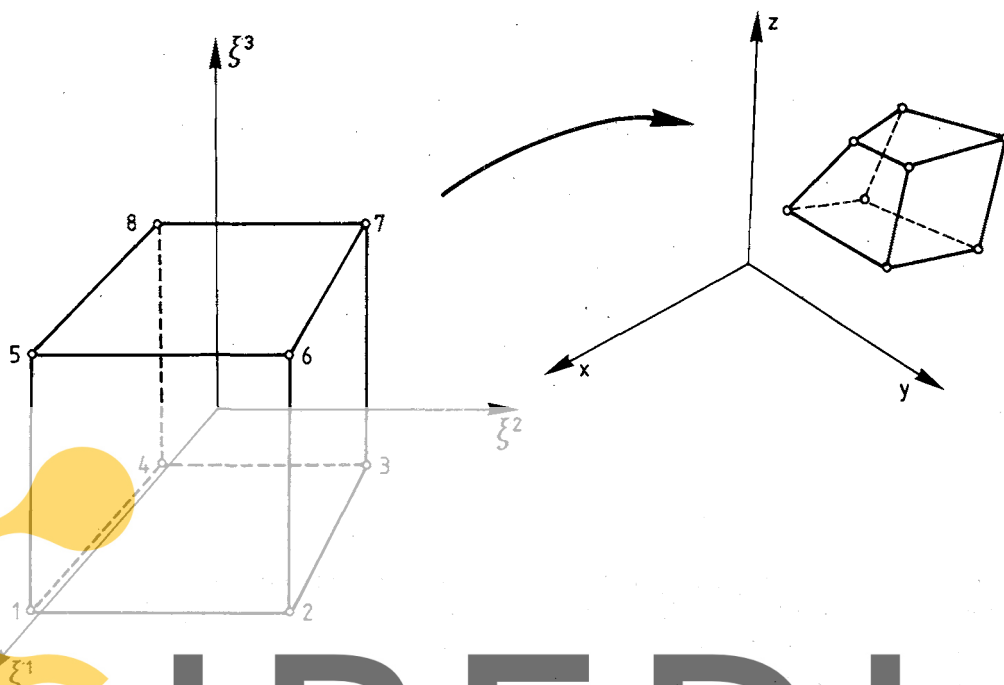


Figura 3. Deformación del elemento finito de 8 nodos utilizado

en donde

$$\bar{B}_1 = [-1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1]^T$$

$$\bar{B}_2 = [-1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1]^T$$

$$\bar{B}_3 = [-1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$$

$$\bar{B}_4 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$$

$$\bar{B}_5 = [1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1]^T$$

$$\bar{B}_6 = [1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1]^T$$

$$\bar{B}_7 = [1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1]^T$$

$$\bar{B}_8 = [-1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1]^T$$

(29)

Como puede comprobarse, los vectores  $\bar{B}$  forman una base ortogonal en  $\mathbb{R}^8$  denominada base modal y que es de gran utilidad para los desarrollos posteriores.

Los vectores  $\bar{B}_1$ ,  $\bar{B}_2$  y  $\bar{B}_3$  como puede fácilmente comprobarse son vectores base de deformación uniforme, mientras que  $\bar{B}_4$  corresponde al modo de traslación de sólido rígido. Los vectores  $\bar{B}_5$ ,  $\bar{B}_6$ ,  $\bar{B}_7$  y  $\bar{B}_8$  veremos más adelante que reciben el nombre de modos de energía nulos.



Derivando el vector  $\vec{N}$  respecto a las coordenadas naturales  $\xi^\alpha$  y particularizando para el punto (0, 0, 0) se obtiene

$$\left. \frac{\partial \vec{N}}{\partial \xi^\alpha} \right|_o = \frac{1}{8} \vec{B}_\alpha \quad (30)$$

Si los vectores  $\vec{B}$  forman una base ortogonal, cualquier vector  $\vec{\phi}$  puede escribirse

$$\vec{\phi} = \phi_M \vec{B}_M \quad (31)$$

con

$$\phi_M = \frac{1}{8} \vec{\phi}^T \vec{B}_M \quad (32)$$

y en particular el vector  $\vec{N}$

$$\vec{N} = N_M \vec{B}_M$$

siendo los valores de  $N_M$  los coeficientes de los vectores  $\vec{B}$  en la expresión (28)

Por lo que hace referencia a la integración numérica, ésta se ha realizado con un solo punto de Gauss, por lo que si  $f$  es una función cualquiera

$$\int_{V_e} f dV = \int_D f \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 = \int_D \psi(\xi^\alpha) d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 = 8 \psi(0,0,0) \quad (33)$$

La aproximación obtenida con esta relación dejará de ser tal y se convertirá en una igualdad si  $\psi(\xi^\alpha)$  es una función lineal de  $\xi^\alpha$ .

El uso de un solo punto de integración presenta la gran ventaja de su rapidez operativa, puesto que las variables fundamentales, tensiones, deformaciones, velocidad de deformación etc. deben evaluarse en un único punto. Presenta sin embargo también inconvenientes que serán analizados más adelante.

En cuanto al volumen de un elemento, éste vendrá determinado por

$$V_e = \int_{v_e} dx dy dz = \int_{v_e^o} |F| dX dY dZ = \int_D \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 \quad (34)$$

y puesto que

$$x^i = x_A^i N_A = 8 x_M^i N_M \quad (35)$$

y

$$\left. \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} \right|_o = x_M^i \quad (M=\alpha) \quad (36)$$

resulta

$$V_e \cong 8 \text{ DET } (x_M^i) \quad M, i = 1, 2, 3 \quad (37)$$

En realidad la expresión anterior es una aproximación, ya que puede verse con relativa facilidad que el volumen viene expresado de forma exacta por

$$V_e = 8 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \frac{2}{3} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_7 & y_7 & z_7 \\ x_6 & y_6 & z_6 \end{vmatrix} + \frac{2}{3} \begin{vmatrix} x_7 & y_7 & z_7 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_5 & y_5 & z_5 \end{vmatrix} + \frac{2}{3} \begin{vmatrix} x_6 & y_6 & z_6 \\ x_5 & y_5 & z_5 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad (38)$$

Es claro que (37) y (38) sólo coinciden cuando se anulan los tres últimos determinantes de (38). Una condición suficiente para que ello ocurra es

$$x_M^i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad M = 5, 6, 7, 8 \quad (39)$$

La condición anterior, expresa la linealidad de  $x^i$  respecto a  $\xi^\alpha$ , linealidad que gráficamente equivale a elementos en forma de paralelepípedos.

Como vemos, la utilización de un punto de Gauss no asegura la correcta integración del volumen, por lo que no puede garantizarse la convergencia monótona de la discretización (ver<sup>17</sup>) a no ser que se tenga una discretización con caras paralelas. Este problema será tratado más adelante.

Por lo que a la matriz de masa se refiere,

$$M_A = \int_{V_e} \varphi N_A dV = \int_{V_o} \varphi^o N_A dV_o = \frac{1}{8} \varphi V_e = \frac{1}{8} \varphi^o V_o^o \quad (40)$$

(A = 1, \dots, 8)

#### b) Frecuencias propias del elemento hexaédrico

El cálculo y estudio de las frecuencias propias de un elemento generalmente es útil como base para análisis comparativos, por proporcionarnos éstas una clara idea de la rigidez del elemento. Asimismo, puesto que a modos de deformación con energía nula corresponden frecuencias nulas, un estudio de este tipo nos confirmará la existencia de modos de deformación de energía nula.

Finalmente, y puesto que para la integración en el tiempo de las ecuaciones dinámicas del movimiento se utiliza un esquema explícito, es de crucial importancia calcular o acotar la frecuencia mayor del sistema para utilizarla en la determinación del intervalo de tiempo crítico.

Las frecuencias propias, se obtendrán de la resolución del problema de autovalores

$$K_{ABj}^i \phi_B^j = \omega_K^2 M_{AB} \phi_B^i$$

Suponiendo un material de tipo hipoeelástico, como puede verse en<sup>19</sup>, la matriz de rigidez  $K_{ABj}^i$  se expresa como:

$$K_{ABj}^i = \int_{V_e} \frac{\partial N_A}{\partial x^\alpha} C^{ijkl} \frac{\partial N_B}{\partial x^l} dV \quad (41)$$

Es evidente que la hipótesis de material hipoeelástico supone una pérdida de generalidad importante, no obstante, el intentar resolver la ecuación (31) de forma analítica y general, es prácticamente imposible. Asimismo recordemos que nuestro interés es profundizar en el comportamiento resistente del elemento en sí, independientemente del modelo de material al que represente, y obtener una acotación válida de la frecuencia máxima.

Es claro que ambos objetivos son perfectamente alcanzables aún con la restricción anterior, ya que una acotación obtenida en el rango elástico será también válida cuando el elemento entre en régimen plástico, por suponer esto un reblandecimiento del material.

Introduciendo en (41) la integración con un punto de Gauss y utilizando la expresión para la matriz de masa (40), (31) se transforma en (estando todas las derivadas, ahora y en lo sucesivo, particularizadas en el punto  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = (0, 0, 0)$ ):

$$\omega^2 \frac{\varphi}{8} v_A^i = \lambda N_{A,i} N_{B,j} v_B^j + \mu (N_{A,K} N_{B,K} v_B^i + N_{A,j} N_{B,i} v_B^j) \quad (42)$$

Donde el autovector se ha expresado en términos de velocidad.

En virtud de ser:

$$N_{A,i} = N_{A,\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^i}$$

y llamando  $K = \omega^2 \frac{\varphi}{8}$ , obtenemos:

$$K v_A^i = N_{A,\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^j} \left[ d N_{B,\beta} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^K} \delta^{ij} v_B^K + \right. \\ \left. + \mu (N_{B,\beta} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^j} v_B^i + N_{B,\beta} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^i} v_B^j) \right] \quad (43)$$

Para simplificar la ecuación anterior vamos a utilizar el sistema de coordenadas intrínsecas  $\{\xi^\alpha\}$  particularizado en (0,0,0) (no como sistema de coordenadas curvilíneas), es decir:

$$v_A^\beta = \left. \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^k} \right)_o v_A^K$$

Con la anterior relación y su inversa, y prescindiendo del subíndice  $_o$ , por comodidad, obtenemos:

$$\begin{aligned} K v_A^\gamma = & \lambda N_{A,\alpha} N_{B,\beta} g^{\alpha\gamma} v_B^\beta + \mu N_{A,\alpha} N_{B,\beta} g^{\alpha\beta} v_B^\gamma + \\ & + \mu N_{A,\alpha} N_{B,\beta} g^{\beta\gamma} v_B^\alpha \end{aligned} \quad (44)$$

Nuevamente, con el fin de simplificar la expresión anterior, vamos a realizar otro cambio de base, transformando las componentes nodales en componentes modales. Recordando que para un campo  $\phi$ :

$$\phi_M = \frac{1}{8} \bar{B}_M^T \cdot \bar{\phi} = \frac{1}{8} B_{MA} \phi_A$$

Donde  $\phi_M$  son las componentes de  $\bar{\phi}$  según el modo  $M$ ;  $\phi_A$  son los valores de  $\phi$  en los nodos y  $B_{MA}$  es el vector base modal correspondiente, definido en (29).

Asimismo, puesto que:

$$N_{A,\alpha} = \frac{1}{8} B_{MA} \delta_{M\alpha}$$

obtenemos, a partir de (44):

$$\begin{aligned} K v_A^\gamma = & \lambda N_{A,\alpha} g^{\alpha\gamma} \delta_{M\beta} v_M^\beta + \mu N_{A,\alpha} g^{\alpha\beta} \delta_{M\beta} v_M^\gamma + \\ & + \mu N_{A,\alpha} g^{\beta\gamma} \delta_{M\beta} v_M^\alpha \end{aligned} \quad (45)$$

Multiplicando la anterior expresión por  $\frac{1}{8} B_{NA}$  y aplicando la ortogonalidad de los vectores modales:

$$B_{MA} B_{NA} = 8 \delta_{MN}$$

Obtenemos finalmente:

$$\begin{aligned}
 K v_N^\gamma = & \frac{\lambda}{8} g^{\alpha\gamma} \delta_{N\alpha} \delta_{M\beta} v_M^\beta + \frac{\mu}{8} g^{\alpha\beta} \delta_{N\alpha} \delta_{M\beta} v_M^\gamma + \\
 & + \frac{\mu}{8} g^{\beta\gamma} \delta_{N\alpha} \delta_{M\beta} v_M^\alpha \\
 & \alpha, \beta = 1, 2, 3 \quad M, N = 1, 2, \dots, 8
 \end{aligned} \tag{46}$$

La ecuación anterior puede ponerse en forma matricial:

$$K V_N^\gamma = K_{NM\alpha}^\gamma v_M^\alpha \tag{47}$$

Siendo  $K_{NM\alpha}^\gamma$  la matriz de rigidez en las nuevas bases:

$$K_{NM\alpha}^\gamma = \frac{1}{8} \left[ (\lambda \delta_{N\beta} \delta_{M\alpha} + \mu \delta_{N\alpha} \delta_{M\beta}) g^{\beta\gamma} + \mu \delta_{N\epsilon} \delta_{M\beta} g^{\epsilon\beta} \delta_\alpha^\gamma \right] \tag{48}$$

Por ser  $\delta_{M\alpha} = 0$  para  $M > 3$ , el tensor  $K_{NM\alpha}^\gamma$  es nulo para  $M > 3$  y  $N > 3$ . Este hecho nos demuestra la existencia de 5 modos de deformación no energéticos para cada componentes espacial entre ellos el de sólido rígido. Tenemos por tanto 15 (5x3) grados de libertad no energéticos o 15 frecuencias de resonancia nulas.

En virtud de lo anterior si representamos  $K_{NM\alpha}^\gamma$  en forma de matriz, donde las filas y columnas corresponden a cada uno de los grados de libertad del elemento (24 en total), y colocando estos de tal forma que primero varíemos la componente espacial y luego la modal, tendremos:

$$K = \begin{array}{c|cccccccc|c}
 \begin{array}{c} x \\ x \\ x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} x \\ x \\ x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} x \\ x \\ x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \rightarrow \text{modo 1} \\ \rightarrow \text{modo 2} \\ \rightarrow \text{modo 3} \\ \rightarrow \text{modo 4} \\ \rightarrow \text{modo 5} \\ \rightarrow \text{modo 6} \\ \rightarrow \text{modo 7} \\ \rightarrow \text{modo 8} \\ \rightarrow \text{modo 9} \end{array} \\
 \hline
 \end{array}$$

Donde los ceros indican matrices nulas de orden  $3 \times 3$  y las  $x$  matrices no nulas.

La submatriz de orden  $9 \times 9$  no nula puede ponerse como:

$$\frac{1}{8} \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)g^{11} & 0 & 0 & 2\mu g^{12} & \lambda g^{11} & 0 & 2\mu g^{13} & 0 & \lambda g^{11} \\ (\lambda + \mu)g^{12} & \mu g^{11} & 0 & \mu g^{22} & (\lambda + \mu)g^{12} & 0 & \mu g^{32} & \mu g^{13} & \lambda g^{12} \\ (\lambda + \mu)g^{13} & 0 & \mu g^{11} & \mu g^{23} & \lambda g^{21} & \mu g^{12} & \mu g^{33} & 0 & (\lambda + \mu)g^{13} \\ (\lambda + \mu)g^{12} & \mu g^{11} & 0 & \mu g^{22} & (\lambda + \mu)g^{12} & 0 & \mu g^{32} & \mu g^{13} & \lambda g^{12} \\ \lambda g^{22} & 2\mu g^{12} & 0 & 0 & (\lambda + 2\mu)g^{22} & 0 & 0 & 2\mu g^{23} & \lambda g^{22} \\ \lambda g^{31} & \mu g^{13} & \mu g^{12} & 0 & (\lambda + \mu)g^{23} & \mu g^{22} & 0 & \mu g^{33} & (\lambda + \beta)g^{22} \\ (\lambda + \mu)g^{13} & 0 & \mu g^{11} & \mu g^{23} & \lambda g^{31} & \mu g^{12} & \mu g^{33} & 0 & (\lambda + \mu)g^{13} \\ \lambda g^{31} & \mu g^{13} & \mu g^{12} & 0 & (\lambda + \mu)g^{23} & \mu g^{22} & 0 & \mu g^{33} & (\lambda + \mu)g^{23} \\ \lambda g^{33} & 0 & 2\mu g^{13} & 0 & \lambda g^{33} & 2\mu g^{23} & 0 & 0 & (\lambda + 2\mu)g^{33} \end{bmatrix}$$

La pérdida de la simetría se debe al cambio de base realizado, puede comprobarse que si:

$$g^{\alpha\beta} = A \quad \delta^{\alpha\beta}$$

la matriz recupera su simetría original.

La matriz **K** presenta 3 filas repetidas que son: segunda y cuarta, tercera y séptima, sexta y octava, lo que implica tres nuevos autovalores nulos. Estas frecuencias representan los 3 giros de sólido rígido posibles en el elemento. En efecto, si determinamos sus vectores propios asociados obtenemos:

$$\begin{aligned} g^{11} \quad \nu_1^2 &= - \nu_2^1 g^{22} & , \text{el resto nulas (+)} \\ g^{11} \quad \nu_1^3 &= - \nu_3^1 g^{33} & , \text{el resto nulas} \\ g^{22} \quad \nu_2^3 &= - \nu_3^2 g^{33} & , \text{el resto nulas} \end{aligned} \quad (49)$$

---

(+) Los superíndices representan componentes según  $\{\xi^\alpha\}$  y los subíndices componentes modales.

Como puede observarse estos vectores definen las rotaciones de sólido rígido respecto a los ejes  $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3, (\bar{e}^\alpha \text{ base dual de } \bar{e}_\alpha)$ .

Tenemos por tanto que de los 24 grados de libertad iniciales, tan solo 6 son energéticos. Por lo tanto únicamente existen 6 frecuencias distintas de 0, las cuales vienen definidas por la ecuación polinómica:

$$\text{DET} (K_{NM\alpha}^\gamma - \lambda \delta_{MN} \delta_\alpha^\gamma) = 0 \quad (50)$$

$$\alpha, \lambda = 1, 2, 3 \quad M, N = 1, 2, 3$$

Dado que conocemos ya tres soluciones de (50), realizando las operaciones algebraicas pertinentes, es fácil demostrar que las soluciones no nulas de (50) son autovalores de la matriz:

$$\frac{1}{8} \begin{bmatrix} (\lambda+2\mu)g^{11} & 2\mu g^{12} & 2\mu g^{13} & \lambda g^{11} & 0 & \lambda g^{11} \\ (\lambda+\mu)g^{12} & \mu(g^{11}+g^{22}) & \mu g^{23} & (\lambda+\mu)g^{12} & \mu g^{13} & \lambda g^{12} \\ (\lambda+\mu)g^{13} & \mu g^{23} & \mu(g^{11}+g^{33}) & \lambda g^{13} & \mu g^{12} & (\lambda+\mu)g^{13} \\ \lambda g^{22} & 2\mu g^{12} & 0 & (\lambda+2\mu)g^{22} & 2\mu g^{23} & \lambda g^{22} \\ \lambda g^{32} & \mu g^{13} & \mu g^{12} & (\lambda+\mu)g^{23} & \mu(g^{22}+g^{33}) & (\lambda+\mu)g^{23} \\ \lambda g^{33} & 0 & 2\mu g^{13} & \lambda g^{33} & 2\mu g^{23} & (\lambda+2\mu)g^{33} \end{bmatrix}$$

El cálculo de los valores propios de la matriz anterior es excesivamente complejo algebraicamente como para abordarlo aquí, sin embargo podemos analizar casos particulares y suponer por ejemplo:

$$g^{12} = g^{13} = g^{23} = 0$$

En tal caso se obtienen de inmediato tres autovalores:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\mu}{8} (g^{11} + g^{22}) \\ \lambda_2 &= \frac{\mu}{8} (g^{11} + g^{33}) \\ \lambda_3 &= \frac{\mu}{8} (g^{22} + g^{33}) \end{aligned} \quad (51)$$

Correspondiente a los modos propios de cizalladura:

$$\nu_2^1 - \nu_1^2 = 0 \quad (\text{El resto de las componentes nulas})$$

$$\nu_3^1 - \nu_1^3 = 0 \quad ''$$

$$\nu_3^2 - \nu_2^3 = 0 \quad ''$$

respectivamente. Y los tres restantes vienen definidos por:

$$K(*) = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} (\lambda + 2\mu)g^{11} & \lambda g^{11} & \lambda g^{11} \\ \lambda g^{22} & (\lambda + 2\mu)g^{22} & \lambda g^{22} \\ \lambda g^{33} & \lambda g^{33} & (\lambda + 2\mu)g^{33} \end{vmatrix}$$

Esta matriz nos es de utilidad para acotar la máxima frecuencia, ya que por conservarse la traza, tenemos:

$$\begin{aligned} \lambda_{mdx} &\leq \text{Tr} [K(*)] = \frac{1}{8} (\lambda + 2\mu) (g^{11} + g^{22} + g^{33}) \\ \lambda_{mdx} &\geq \frac{1}{8} (\lambda + 2\mu) (g^{11} + g^{22} + g^{33}) / 3 \end{aligned} \quad (52)$$

En el caso particular de ser  $\mu = 0$  (como podría ser el caso de gases), tenemos un único valor propio no nulo, definido por la primera de las acotaciones de (52).

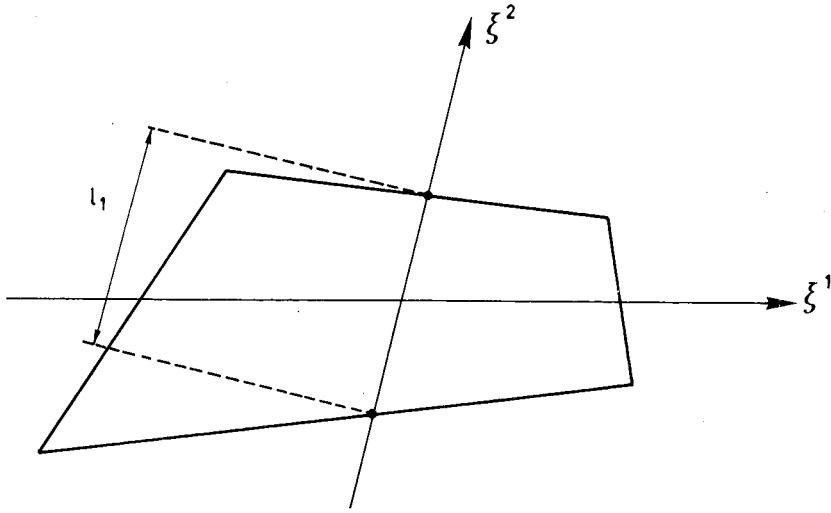
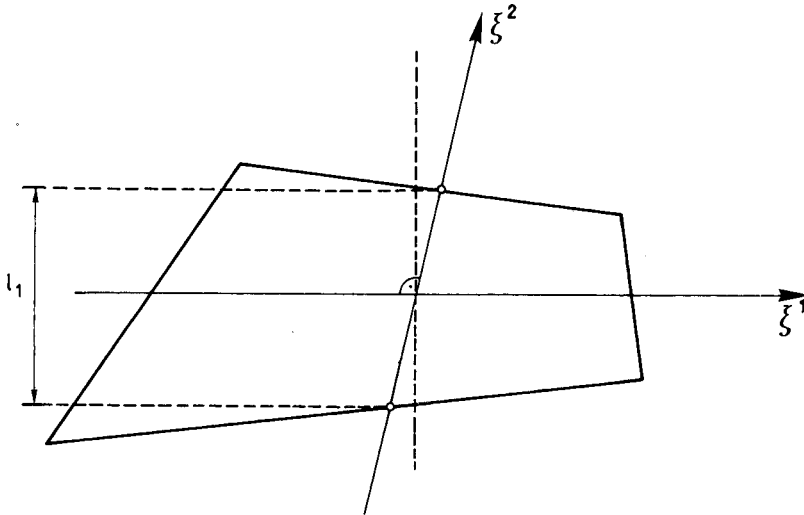
A partir de (52) y por ser  $\lambda = K = \frac{1}{8} \varphi w^2$ , obtenemos una acotación de la frecuencia máxima:

$$C_P \sqrt{\frac{g^{11} + g^{22} + g^{33}}{3}} \leq w_{mdx} \leq C_P \sqrt{g^{11} + g^{22} + g^{33}} \quad (53)$$

Donde  $C_P$  es la velocidad de transmisión de las ondas longitudinales del medio.

Por último podemos relacionar  $g^{\alpha\alpha}$  con las características físicas del elemento, ya que, si representamos una sección de éste por el plano tangente a la superficie  $\xi^3 = 0$  en el origen, se obtiene el gráfico de la figura 4.



Figura 4. Descripción geométrica de  $L_\alpha$ Figura 5. Descripción geométrica de  $l_\alpha$ 

Es fácil comprobar que  $L_\alpha = 2 \|\vec{g}_\alpha\| = 2\sqrt{g_{\alpha\alpha}}$ . Llamando  $l_\alpha$  a la magnitud definida en la figura 5. Por ser  $\vec{g}_\alpha \cdot \vec{g}^\alpha = 1$ , tenemos:

$$\|\vec{g}_\alpha\| \cdot \|\vec{g}^\alpha\| \cos \varphi = 1 \Rightarrow \|\vec{g}^\alpha\| = \frac{1}{\|\vec{g}_\alpha\| \cos \varphi} = \frac{2}{l_\alpha}$$

O de forma equivalente:

$$\|\bar{g}^{\alpha}\| = \sqrt{g^{\alpha\alpha}} = \frac{2}{l_{\alpha}} \rightarrow g^{\alpha\alpha} = \frac{4}{l_{\alpha}^2}$$

Por lo tanto podemos expresar (53) como:

$$2 C_P \sqrt{\frac{1}{3} \left( \frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} + \frac{1}{l_3^2} \right)} \leq w_{m\acute{a}x} \leq 2 C_P \sqrt{\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2} + \frac{1}{l_3^2}} \quad (54)$$

En general, para los materiales con los que vamos a trabajar (principalmente metales) la frecuencia máxima suele estar muy cercana a un valor intermedio definido por:

$$w_{m\acute{a}x} \cong 2 C_P \sqrt{\frac{1}{l_1^2}} = 2 \frac{C_P}{l_1} \quad (55)$$

El intervalo crítico de integración venía definido por:

$$\Delta t_{cri} = \frac{2}{w_{m\acute{a}x}^*}$$

Siendo  $w_{m\acute{a}x}^*$  la frecuencia máxima del sistema ensamblado, que puede acotarse por:

$$w_{m\acute{a}x}^* \leq \max_e (w_{m\acute{a}x}^e) = \max_e \left( \frac{2 C_P^e}{l_1^e} \right) \quad (56)$$

Finalmente obtenemos  $\Delta t$  como:

$$\Delta t = \min_e \left( \frac{l_1^e}{C_P^e} \right) \cdot F \quad (57)$$

Siendo  $F$  un factor cuyo fin es separar ligeramente el intervalo de integración del intervalo crítico, factor que usualmente toma valores comprendidos entre .85 y .95.

## INTEGRACION DE LA ECUACION DINAMICA DE EQUILIBRIO

### a) Algoritmo de integración:

El esquema de integración numérica utilizado, ha sido el explícito de las diferencias centrales. Los esquemas implícitos resultan poco eficientes para este tipo de problemas

Las velocidades y los vectores de posición valen

$$\begin{aligned} v_{n+1/2}^i &= v_{n-1/2}^i + a_n^i \Delta t_{n-1/2} \\ x_{n+1/2}^i &= x_n^i + v_{n+1/2}^i \Delta t_n \end{aligned} \quad (58)$$

donde

$$\Delta t_{n-1/2} = (\Delta t_n + \Delta t_{n-1}) / 2$$

Para el cálculo de  $\bar{a}_n$  recurrimos a la ecuación de equilibrio particularizando en el tiempo  $t_n$

$$M_{ab} (a_b^i)_n + (T_a^i)_n = (F_a^i)_n \quad (59)$$

en donde  $(T_a^i)_n$  viene dado por cualquiera de las expresiones (3) particularizado para el tiempo  $t = t_n$

A partir de (59) obtenemos las aceleraciones en el instante  $t$  como:

$$a_{b,n}^i = M_{ab}^{-1} (F_{a,n}^i - T_{a,n}^i) \quad (60)$$

Es claro que la rapidez y eficacia del método aumentan considerablemente cuando la matriz  $M_{ab}$  es diagonal, si bien esto no ocurre en general, es técnica común forzar la diagonalidad de  $M$  por simple suma de sus filas:

$$M_a^* = \sum_e \left( \int_{v_e} \sum_B \varphi N_A N_B dV \right) = \sum_e \left( \int_{v_e} \varphi N_A dV \right) \quad (61)$$

Finalmente (60) toma la forma simplificada:

$$a_{a,n}^i = (F_{a,n}^i - T_{a,n}^i) / M_a^* \quad (62)$$

La matriz  $M^*$  recibe la denominación de matriz de masas concentrada y su empleo es técnica muy habitual en el campo de los elementos finitos.

La limitación fundamental de los métodos explícitos es que todos ellos son condicionalmente estables, esto es, el intervalo  $\Delta t_n$  a utilizar debe ser menor que un cierto intervalo crítico de valor definido por (57). Para el método de las diferencias centrales se tiene:

$$\Delta t_n \leq 2/w_K$$

Siendo  $w_K$  la máxima frecuencia de vibración propia del sistema en el instante  $t$  definido en el apartado anterior.

b) Actualización de las tensiones y deformaciones

Para la evaluación de la ecuación (62) se conoce del intervalo de tiempo anterior el término  $T_a^i$ , término que viene expresado por:

$$T_{a,n}^i = \sum_e \left( \int \sigma_n^{ij} \frac{\partial N_A}{\partial x^j} dV_n \right) = \quad (63)$$

$$= \sum_e \left( \int T_n^{iI} \frac{\partial N_A}{\partial X^I} dV_o \right) = \quad (64)$$

$$= \sum_e \left( \int T_n^{i\alpha} \frac{\partial N_A}{\partial \xi^\alpha} dV_o \right) \quad (65)$$

Donde  $\sigma_n^{ij}$  son las tensiones de Cauchy del instante  $n$ , y  $T_n^{iI}$  y  $T_n^{i\alpha}$  son respectivamente los tensores de Piola-Kirchoff en coordenadas cartesianas y mixtas.

La utilización de una u otra expresión vendrá determinada por el tipo de ecuación constitutiva del material. Para materiales hipoelásticos tendremos:

$$\hat{\sigma}^{ij} = C^{ijkl} D_{kl}$$

Con

$$\hat{\sigma}^{ij} = \dot{\sigma}^{ij} + W_{ik} \sigma^{kj} + W_{jk} \sigma^{ki}$$

La forma más simple, y coherente con el esquema explícito de integración, de actualizar las tensiones es calcular:

$$\sigma_n^{ij} = \sigma_{n-1}^{ij} + \hat{\sigma}_{n-1/2}^{ij} \Delta t_{n-1/2} \quad (66)$$

Donde:

$$\hat{\sigma}_{n-1/2}^{ij} \Delta t_{n-1/2} = \hat{\sigma}_{n-1/2}^{ij} \Delta t_{n-1/2} + R_{n-1/2}^{ij} \quad (67)$$

Con:

$$R_{n-1/2}^{ij} = (\sigma_{n-1/2}^{kj} W_{ik,n-1/2} + \sigma_{n-1/2}^{ik} W_{jk,n-1/2}) \Delta t_{n-1/2} \quad (68)$$

$$\hat{\sigma}_{n-1/2}^{ij} \Delta t_{n-1/2} = C^{ijkl} D_{kl,n-1/2} \Delta t_{n-1/2} \quad (69)$$

Los términos  $W_{ij, n-1/2}$  y  $D_{ij, n-1/2}$  se obtienen a partir de las velocidades en el instante  $t_{n-1/2}$ :

$$\Delta t_{n-1/2} W_{ij, n-1/2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_{n-1/2}^i}{\partial x_n^j} - \frac{\partial v_{n-1/2}^j}{\partial x_n^i} \right) \Delta t_{n-1/2} \quad (70)$$

$$\Delta t_{n-1/2} D_{ij, n-1/2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_{n-1/2}^i}{\partial x_n^j} + \frac{\partial v_{n-1/2}^j}{\partial x_n^i} \right) \Delta t_{n-1/2} \quad (71)$$

El término  $\frac{\partial v^i}{\partial x^j}$  puede calcularse como:

$$\frac{\partial v_{n-1/2}^i}{\partial x_n^j} = v_{A, n-1/2}^i \frac{\partial N_A}{\partial x_n^j} \quad (72)$$

Podemos actualizar la presión de forma elástica como:

$$p_n = p_{n-1} - K D_{kk, n-1/2} \Delta t_{n-1/2} \quad (73)$$

Por el contrario la componente desviadora, en virtud de (24):

$$z_n^{ij} = z_{n-1}^{ij} + \overset{\circ}{z}_{n-1/2}^{ij} \Delta t - \frac{3G}{H+3G} \frac{j^* \Delta t_{n-1/2}}{J} z_n^{ij}$$

Expresión que puede simplificarse por:

$$z_n^{ij} = \gamma (z_{n-1}^{ij} + \overset{\circ}{z}^{*ij} \Delta t_{n-1/2}) \quad (74)$$

Siendo  $\overset{\circ}{z}^{*ij}$  el incremento de tensiones suponiendo régimen elástico y  $\gamma$  un coeficiente tal que  $z_n^{ij}$  se encuentre en la superficie de fluencia:

$$\frac{1}{2} z_n^{ij} z_n^{ij} - \frac{k_n^2}{3} = 0$$

Y en virtud de la ley de rigidización definida en (25):

$$k_n = k_{n+1} + H \Delta E_p \quad (75)$$

Donde podemos obtener el incremento de deformación plástica equivalente a partir de (23):

$$\Delta E_p = \frac{\sqrt{3}}{H+3G} (J_n^* - \frac{1}{\sqrt{3}} k_{n-1}) \quad (76)$$

En el caso de ser  $J^* \leq \frac{1}{\sqrt{3}} k_{n-1}$  estamos en régimen elástico y  $\gamma = 1$ .

Como puede observarse estamos empleando las fórmulas diferenciales de la plasticidad de forma incremental, ello es válido si el incremento de tensiones es suficientemente reducido, en caso contrario debería procederse mediante una serie de incrementos de deformación (ver<sup>18</sup>).

Para materiales hiperelásticos puesto que las tensiones no dependen de la trayectoria de deformaciones, se pueden calcular de forma directa los segundos tensores de Piola-Kirchoff:

$$S_n^{IJ} = C^{IJKL} E_{KL,n} \quad (77)$$

Donde:

$$E_{KL,n} = \left( \frac{\partial x_n^i}{\partial X^K} \frac{\partial x_n^i}{\partial X^L} - \delta_{KL} \right) / 2$$

y el primer tensor de Piola-Kirchoff

$$T_n^{iI} = \frac{\partial x_n^i}{\partial X^K} S_n^{KI} \quad (78)$$

Aún siendo este procedimiento bastante rápido, en ocasiones, es menos costoso proceder utilizando el sistema de coordenadas intrínsecas  $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ . De esta forma se calcula  $S^{\alpha\beta}$  como:

$$S^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\gamma\delta}$$

Con:

$$E_{\gamma\delta} = (g_{\gamma\delta,n} - h_{\gamma\delta}) \frac{1}{2} \quad (79)$$

Siendo:

$$g_{\gamma\delta,n} = \frac{\partial x_n^i}{\partial \xi^\gamma} \frac{\partial x_n^i}{\partial \xi^\delta} = x_{A,n}^i x_{B,n}^i \frac{\partial N_A}{\partial \xi^\gamma} \frac{\partial N_B}{\partial \xi^\delta} \quad (80)$$

$$h_{\gamma\delta} = g_{\gamma\delta,0} = X_A^I X_B^I \frac{\partial N_A}{\partial \xi^\gamma} \frac{\partial N_B}{\partial \xi^\delta} \quad (81)$$

Y finalmente:

$$T_n^{i\alpha} = \frac{\partial x_n^i}{\partial \xi^\gamma} S_n^{\gamma\alpha} = x_{A,n}^i \frac{\partial N_A}{\partial \xi^\gamma} S_n^{\gamma\alpha} \quad (82)$$

Recuérdese que el tensor elástico  $C^{\alpha\beta\gamma\delta}$  se supone constante respecto al tiempo y por tanto debe calcularse tan solo en el instante inicial como:

$$C^{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda h^{\alpha\beta} h^{\gamma\delta} + \mu(h^{\alpha\gamma} h^{\beta\delta} + h^{\alpha\delta} h^{\beta\gamma}) \quad (83)$$

### c) Evaluación de las fuerzas internas resistentes

Las diferentes expresiones mediante las cuales podemos obtener las fuerzas internas son:

$$T_A^i = \int_v \sigma^{ij} \frac{\partial N_A}{\partial x^j} dV \quad (84)$$

$$T_A^i = \int_{v_0} T^{ij} \frac{\partial N_A}{\partial X^j} dV_0 \quad (85)$$

$$T_A^i = \int_{v_0} T^{i\alpha} \frac{\partial N_A}{\partial \xi^\alpha} dV_0 \quad (86)$$

El empleo de uno u otra ecuación lo vamos a condicionar a la ecuación constitutiva del elemento sobre el que estemos integrando, a fin de obtener en cada material el algoritmo menos costoso.

El interés por optimizar los algoritmos de cálculo del vector  $T_A^i$  no es gratuito, ya que utilizando métodos de integración explícitos, cerca del 95 % de tiempo de cálculo se consume determinando  $T$  para cada elemento. Por ello, y en la medida de lo posible, nos esforzaremos por optimizar al máximo las subrutinas en las que realicemos este cómputo, lo que nos obliga a utilizar expresiones distintas, según el método elegido para representar el comportamiento del material al que pertenezca cada elemento.

#### c.1) Método de cálculo hiperelástico:

Para este tipo de materiales se utiliza la integral (86), que realizándola con un punto de integración se expresa como:

$$[T_A^i] = [T^{i\alpha}]_0 \begin{bmatrix} \bar{B}_1^T \\ \bar{B}_2^T \\ \bar{B}_3^T \end{bmatrix} \text{DET} [X_n^I] \quad (87)$$

$$I = 1, 2, 3 \quad M = 1, 2, 3$$

El cálculo de  $T^{i\alpha}$  ( $\xi^\alpha = 0$ ) se puede realizar fácilmente a partir de (77) - (79):

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta}(0) &= \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\beta} - \frac{\partial X^I}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^I}{\partial \xi^\beta} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (x_M^i x_N^i - X_M^I X_N^I) \delta_{\alpha M} \delta_{\beta N} \end{aligned} \quad (88)$$

O en forma matricial:

$$\mathbf{E}(0) = \frac{1}{2} (\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a} - \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})$$

Con  $\mathbf{a} = [x_M^i]$ ,  $\mathbf{A} = [X_M^I]$  y  $i, I, M \in \{1, 2, 3\}$

En el programa, a fin de ahorrar tiempo de ejecución, la matriz  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$  se calcula al principio y se almacena en memoria, siendo tan solo necesario el cálculo de  $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{a}$ .

Una vez conocidas las deformaciones se determina el segundo tensor de Piola-Kirchoff como:

$$S^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\gamma\delta}$$

Siendo  $C^{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda h^{\alpha\beta} h^{\gamma\delta} + \mu (h^{\alpha\gamma} h^{\beta\delta} + h^{\alpha\delta} h^{\beta\gamma})$

La relación anterior puede también expresarse, en virtud de la simetría de  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{E}$ , como:

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{E}} \quad (89)$$

De nuevo por ser  $\mathbf{C}$  constante con el tiempo es calculada tan solo al principio del programa y almacenada en memoria. Por último se calcula el primer tensor de Piola-Kirchoff:

$$T^{i\alpha}(0) = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\beta} \Big|_0 S^{\alpha\beta}$$

O en forma matricial:

$$\mathbf{T} = [x_M^i] \cdot \mathbf{S} \quad (90)$$

Como puede verse en la tabla I este algoritmo es el que precisa un número de operaciones menor por elemento e interacción.



## c.2) Método de cálculo elastoplástico:

Para elementos que se comporten según un método hipoeelástico o elastoplástico procederemos al cálculo de las fuerzas internas mediante el empleo de la ecuación (84) integrada con un punto de Gauss:

$$[T_A^i] = [\sigma^{ij}]_o \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} \bar{B}_1^T \\ \bar{B}_2^T \\ \bar{B}_3^T \end{bmatrix} \text{DET}[x_M^i] \quad (91)$$

Donde los subíndices representan componentes modales.

Para el cálculo del tensor de Cauchy en el punto de integración utilizaremos las ecuaciones (63) - (71) particularizadas en  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = (0, 0, 0)$ , y la relación:

$$\left[ \frac{\partial N_A}{\partial x^i} \right]^T = 1/8 \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} \bar{B}_1^T \\ \bar{B}_2^T \\ \bar{B}_3^T \end{bmatrix} \quad (92)$$

A partir de esta relación podemos calcular el tensor gradiente de velocidades, que utilizaremos para determinar los tensores  $D$  y  $W$ :

$$\left[ \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right]_o = \left[ v_A^i \right] \cdot \left[ \frac{\partial N_A}{\partial x^j} \right]_o \quad (93)$$

Como puede observarse en la tabla I este procedimiento de integración es relativamente más lento que el utilizado con materiales hiperelásticos. Es sin embargo frecuente la existencia de zonas, en teoría de material elastoplástico, que por causa de su relativa lejanía al punto de impacto permanecen durante un número elevado de interacciones en régimen elástico y con pequeñas deformaciones, si bien con grandes corrimientos.

## c.3) Método de cálculo inicialmente elástico:

Para el desarrollo de este algoritmo no es eficaz el empleo de (86), pues al trabajar en coordenadas intrínsecas no ortogonales la determinación de la tensión equivalente exigiría un costo de cálculo elevado, inutilizando completamente el método. Por ello es preferible proceder utilizando coordenadas cartesianas, y calcular las fuerzas internas como:

$$[T_A^i] = 8 [T^{II}]_o \left[ \frac{\partial N_A}{\partial X^I} \right] \text{DET}[X_M^I] \quad (94)$$

La matriz  $\left[ \frac{\partial \bar{N}_A}{\partial X^I} \right]$  se calcula al principio y se almacena en memoria, junto con el volumen inicial.

El tensor  $T^{ij}$  se determina a partir de (77) - (78):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_o &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \\ \mathbf{F} &= [x_A^i] \cdot \left[ \frac{\partial N_A}{\partial X^I} \right]_o \\ \bar{\mathbf{S}} &= \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{E}} \\ [T^{ij}]_o &= \left[ \frac{\partial x^i}{\partial X^I} \right] [S^{IJ}] = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \end{aligned} \quad (95)$$

Por último, a partir de  $\mathbf{S}$  calculamos la tensión equivalente, que supondremos coincide con la que obtendríamos del tensor de Cauchy, hipótesis que será válida siempre que estemos en pequeñas deformaciones, al ser  $\mathbf{F}$  un tensor de rotación. Si la tensión equivalente supera la tensión límite, calcularemos el tensor de Cauchy como:

$$\bar{\sigma} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^T \frac{v_o}{v} \quad (96)$$

y en las próximas iteraciones determinaremos las fuerzas internas según el algoritmo descrito anteriormente.

TABLA I

Método	Sumas	Productos
elástico	80	120
elasto-plástico	190	220
inicial elástico	130	170

d) Control de los modos de energía nula:

En los tres procedimientos anteriores las deformaciones o velocidades de deformación venían expresadas como función de términos:

$$x_M^i \quad \text{o} \quad [x_A^i] \cdot \left[ \frac{\partial N_A}{\partial X^I} \right]_o \quad \text{o} \quad [v_A^i] \left[ \frac{\partial N_A}{\partial x^\alpha} \right]_o \quad (97)$$

Como se observa en la relación (92) los vectores  $\frac{\partial \tilde{N}}{\partial X^I}$  y  $\frac{\partial \tilde{N}}{\partial x^i}$  no son más que una combinación lineal de  $B_1, B_2, B_3$ , vectores base de los modos de deformación uniforme. Por ello en las tres formulaciones anteriores tan solo las tres primeras componentes modales del campo de velocidades o geometría son “activas” para el cálculo de la deformación en el punto de Gauss (0, 0, 0).

Recíprocamente, campos de velocidades con sus tres primeras componentes modales nulas, pero no así las cinco restantes tienen deformación o velocidad de deformación nula en el punto de Gauss, por lo que no contribuyen en el vector de fuerzas resistentes. En realidad esto es válido, independientemente del número de puntos de integración, para el cuarto modo, por representar este las traslaciones de sólido rígido. Sin embargo, deja de ser válido para los cuatro últimos modos, que por este motivo reciben el nombre de modos de energía nula, o más comunmente modos de “hourglass” y análogamente a los vectores  $\tilde{B}_5, \tilde{B}_6, \tilde{B}_7, \tilde{B}_8$  se les denomina vectores de “hourglass”.

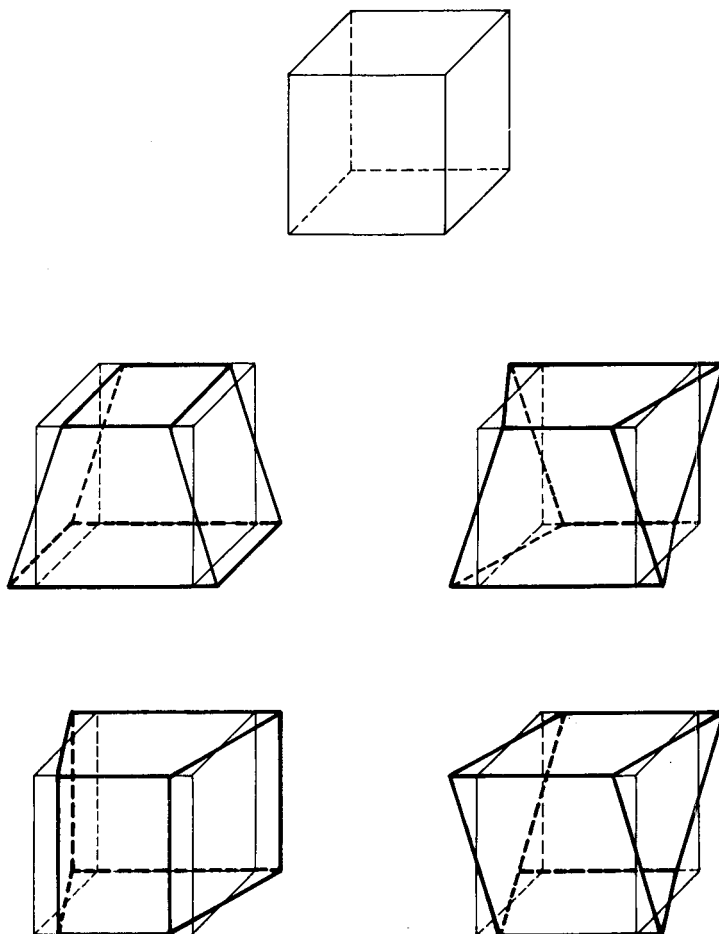


Figura 6. Modos de hourglass para la componente y

En la figura 6 se han representado los cuatro modos de hourglass para la componente y de la geometría. Como puede verse, si bien el elemento está en general deformado, en el punto de Gauss no existe deformación.

Los modos de hourglass, consecuencia de una integración reducida, nos plantean un serio problema, pues al ser su contribución en las fuerzas resistentes nula, no están controlados por el algoritmo, por lo que bajo ciertas condiciones de contorno y de carga, pueden crecer desorbitadamente y desvirtuar totalmente la solución.

Análogamente, la correcta integración del volumen usando un punto de Gauss, es tan solo factible si las componentes de hourglass de la geometría eran nulas. Todo ello nos exige, en la medida de lo posible, controlar tales modos, para lo cual será necesario la adición de unas fuerzas artificiales no incluidas en la ecuación global de equilibrio.

La integración con un punto de Gauss **presenta**, sin embargo, una nueva ventaja respecto a la integración clásica, cual es el tratamiento de materiales casi incompresibles. Tal es el caso de problemas con grandes deformaciones plásticas, por tener éstas una componente volumétrica nula (para modelos de Von-Mises y en general modelos de metales).

En estos casos la integración con ocho puntos provoca una sobrerigidización de la estructura hasta límites de bloquear totalmente a la misma, fenómeno que se conoce con el nombre de acodamiento plástico.

El método que hemos empleado en el presente estudio para controlar estos modos es el propuesto por Hallquist (ver<sup>13-16</sup>). El cual, junto con su rapidez y sencillez, conduce a resultados altamente precisos.

Hemos de recordar, antes de describir el algoritmo, que los modos de hourglass no alteran en absoluto el estado tensional del sólido, sino que tan solo repercuten en la geometría del cuerpo. Igualmente es importante observar que tales modos han sido deducidos para un elemento aislado. No obstante es posible que al ensamblar la estructura e imponer las condiciones de contorno tales movimientos no puedan reproducirse. Veamos un simple ejemplo, supongamos un ensamblaje de dos elementos bidimensionales de 4 nodos y representemos todos los posibles modos compatibles de deformación, tales que sólo conlleven movimientos en una dirección (fig. 7).

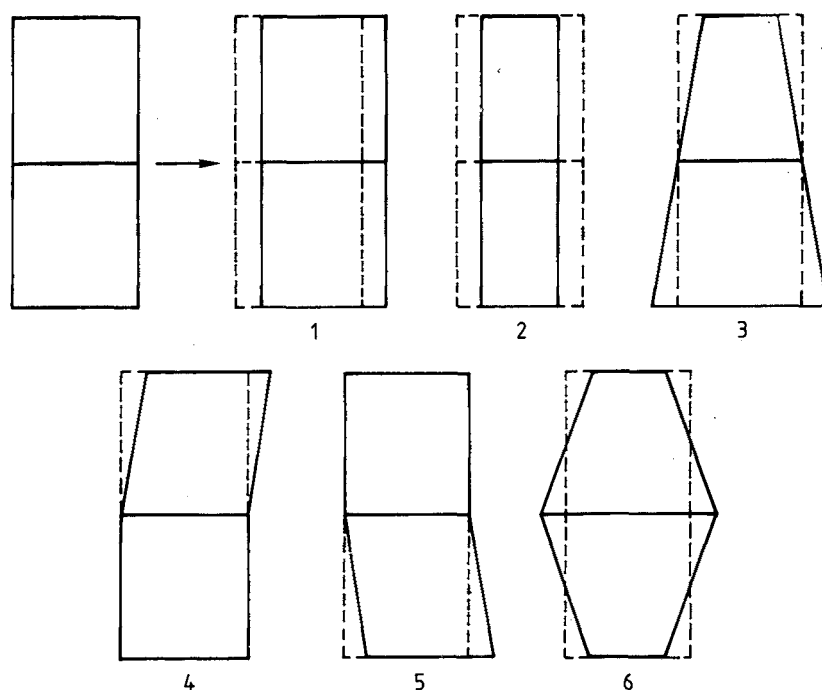


Figura 7. Combinación de movimientos en una dirección en dos nodos

De todos ellos tan solo el sexto no produce energía de deformación, por ser combinación de modos de hourglass puros en ambos elementos.

A su vez en el tercero de ellos aparece hourglass en los elementos, pero combinado con modos lineales que sí proporcionan energía (fig. 8).

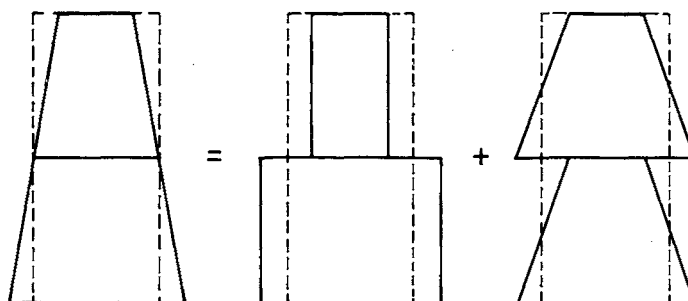


Figura 8. Combinación de modos de deformación

Puede verse por tanto la existencia de dos tipos de hourglass, el que forma parte estable de la deformación de la estructura, y cuya misión es compatibilizar los movimientos entre elementos, y aquel que aparece de forma totalmente indeseable e incontrolada o espúrea. Esta diferenciación evidentemente tan solo puede realizarse estudiando la estructura de forma global, no estudiando cada elemento aisladamente.

Experimentalmente se ha comprobado (ver<sup>16</sup>) que la deformación de hourglass espúrea se produce con frecuencias mucho más alta que la deformación propia de la estructura. Por ello Halquist propone como método óptimo para controlar los modos de hourglass un amortiguamiento de tipo viscoso de las mismas.

De esta forma se aplican unas fuerzas viscosas que han de cumplir dos requisitos para no interferir con los modos de deformación uniforme, a saber, ser nulas para campos de velocidades lineales y ser ortogonales a éstos. La forma más simple de conseguirlo es hacer, llamando  $H$  a las fuerzas viscosas anti-hourglass:

$$H_M^i = -\epsilon v_M^i \quad \text{para } M = 5, 6, 7, 8 \quad (98)$$

$$H_M^i = 0 \quad \text{para } M = 1, 2, 3, 4$$

Siendo  $\epsilon$  un coeficiente de amortiguamiento de valor:

$$\epsilon = \xi w m = \xi \varphi \frac{v}{l} \frac{1}{4} c_p \quad (99)$$

Donde  $\xi$  es un coeficiente comprendido entre .06 y .15, y  $l$  una longitud característica del elemento, que tomaremos como la raíz cúbica del volumen, por tanto:

$$\epsilon = \frac{1}{4} \xi \varphi v^{2/3} \quad (100)$$

Finalmente la ecuación de equilibrio global puede ponerse como:

$$M_{ab} x_b^i + T_a^i + H_a^i = F_a^i \quad (101)$$

## CONCLUSIONES

A tenor de lo expuesto en el desarrollo teórico, es claro que el problema principal con el que nos encontramos al intentar resolver numéricamente un problema de impacto es el elevado tiempo de cálculo que ello conlleva. Es por ello por lo que para su resolución se precisan programas de gran eficacia y competencia, lo que exige una cuidadosa elaboración de los algoritmos y una esmerada transcripción de los mismos a language FORTRAN, con el fin de evitar, en la medida de lo posible, operaciones inútiles (productos por cero, repetición de operaciones...) tan frecuentes en los programas usuales de elementos finitos.

Por otro lado, la conveniencia del empleo de esquemas explícitos viene determinada por la necesidad de obtener algoritmos de avance en el tiempo rápidos, a pesar de exigir incrementos de tiempo pequeños, ya que tales incrementos están limitados también por la necesidad existente en problemas de impacto de permitir la representación de frecuencias elevadas. Estos esquemas, gracias a su rapidez y competencia, son actualmente los únicos capaces de tratar discretizaciones con un número sumamente elevado de elementos, como pueden ser 1.0000, 100000 o incluso superiores.

Juntamente con el empleo de métodos explícitos, en problemas de impacto, es imprescindible utilizar elementos extremadamente simples y rápidos de integración. Buen ejemplo de ellos es el elemento utilizado por nosotros en el presente estudio, el hexaedro irregular con un punto de integración. Su extremada simplicidad es tal que su utilización en cálculo estático o cálculo dinámico de baja frecuencia sería impracticable, por precisar una discretización excesivamente fina. Sin embargo en cálculo de impactos, esta finura en la discretización viene ya impuesta por otros motivos, como son la necesidad de representar frecuencias elevadas y el intentar reducir los efectos de la distorsión o suavizado de los frentes de onda. De esta forma, si empleásemos elementos más refinados y complejos, como pueden ser elementos cuadráticos, cúbicos o con varios puntos de integración, y pretendiésemos mantener constantes los tiempos de cálculo, nos veríamos obligados a realizar discretizaciones mucho más gruesas (si bien, aun así, la representación estática del campo de tensiones y desplazamientos sería probablemente mejor), lo que inevitablemente nos conduciría a distorsiones de los frentes inaceptables.

Otro de los elementos simples que podría suponerse útil para problemas de impacto es el elemento tetraédrico. No obstante, éste presenta ciertos inconvenientes, primeramente ocupa un volumen muy reducido (lo que se traduce en un número mayor de elementos) para la elevada longitud media de sus lados (que determina la magnitud de la distorsión); por otro lado, presenta también problemas de acodamiento plástico cuando se trabaja con modelos de Von Misses, Treska y similares. Este último problema puede solventarse utilizando dos mallas superpuestas, una de tetraedros para integrar la parte desviadora de las tensiones y otra de hexaedros para la componente volumétrica.

## REFERENCIAS

1. M. L. Wilkins, "Calculation of Elastic-Plastic Flow", *Methods in Computational Physics*, Vol. 3, (1964).
2. G. Maenchen and S. Sack, "The Tensor Code" *Methods in Computational Physics*, (1964).
3. W. F. Noh, "Numerical Methods in Hidrodinamic Calculations", *Report UCRL-52112*, Lawrence Livermore Laboratory, Berkeley, (1976).
4. C. J. Constantino, "Stress Waves in Layered Arbitrary Media", ITT Research Institute, Report SAMSO TR-68-181, Chicago, (1968).
5. J. T. Oden, "A General Theory of Finite Elements", *I. J. N. M. E.*, (1969).
6. S. W. Key, "Hondo-A Finite Elements Computer Program for the Large Deformation Dynamic Response of Axisimetric Solids", Sandia National Laboratory, Albuquerque, Rep. 74-0039.
7. I. Farhooman, E. L. Wilson, "A Non-Linear Finite Element Code for Analyzing the Blast Response of Underground Structures", U. S. Army Waterways Experiment Station, Rep. N-70-1.
8. T. Belytschko, R. L. Chiapetta and H. D. Bartel, "Efficient Large Scale Nonlinear Analysis by Finit Element", *I. J. N. M. E.* Vol. 10, (1976).
9. T. Belytschko and R. Mullen, "Explicit Integration of Structural Problems", en "*Finite Elements in Nonlinear Mechanics*", editado por P. G. Bergan, Tapir, (1978).
10. T. J. Hughes, J. L. Sackman and R. L. Taylor, "Finite Element Formulation and Solution of Contact-Impact Problems in Continium Mechanics", University of California, Department of Civil Engineering, Rep. UC SESM 74-8.
11. T. J. Hughes, J. L. Sackman and R. L. Taylor, "Finite Element Formulation and Solution of Contact-Impact Problems in Continium Mechanics II, III y IV", University of California, Department of Civil Engineering, Rep. UC SESM 75-3, 75-7 y 76-4.
12. T. J. Hughes, J. L. Sackman, R. L. Taylor, A. Cournier and W. Kanoknukulchai, "Contact-Impact Problems", University of California, Department of Civil Engineering, Rep. SESM 78-4.
13. J. O. Halquist, "A Procedure for the Solution of Finite-Deformation Contact-Impact Problems by Finit Element Method", Lawrence Livermore Laboratory, Rep. UCRL-52066, (1976).
14. J. O. Halquist, "A Numerical Treatment of Sliding Interfaces and Impact", en K. C. Park y D. K. Gartling (Eds.) "Computational Technics for Interface Problems", AMD, Vol. 30, ASME New York, (1978).
15. J. O. Halquist, "A Numerical Procedure for Three Dimensional Impact Problems", *ASCE preprint* 2956, (1977).
16. J. O. Halquist, "Theoretical Manual for DYNA-3D", Lawrence Livermore Laboratory, (1982).
17. O. C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method in Engineering Science". McGraw-Hill, London, (1977).
18. E. Hinton and D. R. J. Owen, "Finite Elements in Plasticity", Pineridge Press, Swansea.
19. H. D. Hibbit, P. V. Märcal, J. R. Rice, "Finite Element Formulation for Problems of Large Strain and Large Displacements" *Int. Jour. Solids Structures*, Vol. 6, (1970).

